TD1 : Intégrales de Riemann

Exercice 1. (**Formule de la moyenne - Résultat à connaitre**)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $\forall x \in [a, b],\ g(x) \geq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes à l'aide de la formule de la moyenne :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{dt}{te^t}$ b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{n^2+1}^{n^2+n+1} \frac{\arctan t^2}{\sqrt{t}}\, dt$ c. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi t)}{\ln t}\, dt$

Exercice 3. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, $a < b$. Montrer que, $\int_a^b f(t)\, dt = 0$ si et seulement si $f \equiv 0$ sur $[a, b]$.

Exercice 4. (**Inégalité de Cauchy-Schwarz - Résultat à connaitre**) Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\, dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\, dt\right).$$

On suppose, de plus, f et g continues, montrer que l'on a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[0, T]$ et soit $a \in [0, T]$ tel que $f(a) = 0$.

1. Montrer que pour tout $u \in [a, T]$, $f^2(u) \leq (u - a) \int_a^u (f'(x))^2 dx$.
2. En déduire que pour tout $t \in [a, T]$, $\int_a^t f^2(x)dx \leq \frac{(t-a)^2}{2} \int_a^t (f'(x))^2 dx$.

Exercice 6. Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant un changement de variable, montrer que

a. si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$,

b. si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$,

c. si f est périodique de période $T > 0$, alors pour tout α, β de $\mathbb{R}$ on a $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

a. $\displaystyle\int_1^2 \ln x\, dx$ b. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\, dx$ c. $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx$ d. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\, dx$ e. $\displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2\, dx$

f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}\, dx$ g. $\displaystyle\int_0^\pi xe^x \cos x\, dx$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable.

a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{t^2+a^2}$ avec $a > 0$ b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}\, dt$ c. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$ d. $\displaystyle\int_0^u \tan(t)\, dt$ avec $u \in [-\pi/2, \pi/2]$

e. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)^n}{t}\, dt$ avec $n \in \mathbb{N}$ f. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t}\, dt$

Exercice 9. (Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a, b]$.

a. Montrer par récurrence (et à l'aide d'intégrations par parties) que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

b. En déduire la majoration suivante (inégalité de Taylor-Lagrange)

$$\left| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

c. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 10. Calculer les intégrales des fonctions rationnelles suivantes :
a. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{x^2-x-6}\,dx$ c. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x}{x^2-4x+4}\,dx$ d. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{x^2-x+1}\,dx$
e. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, on pose $A_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, écrire une relation de récurrence entre $A_n(x)$ et $A_{n+1}(x)$.
b. Donner l'expression explicite de $A_2(x)$.