Partiel 14 Mars 2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Questions de cours.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue définie sur $[a, b[$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition d'intégrale absolument convergente.
   (b) Montrer que si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.
   (c) La réciproque (si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente alors elle est absolument convergente) est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.
2. Vrai ou faux, sans justification. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I alors f est continue sur I.
   (b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I alors f est bornée sur I.
   (c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
   (d) Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Exercice 1. 1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

2. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence ou la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$ et en déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha}}\,dt$.
3. Étudier la convergence ou la divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\ln t + t^4}\,dt$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & x \in [0, n] \\ 0 & x \in]n, +\infty[\end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, soit $g_n(x) = e^{-x} - f_n(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tour $x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) \geq 0$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n \in]0, n[$ le maximum de g_n sur l'intervalle $[0, n]$. Montrer que pour tout $x \in [0, n]$
   $$g_n(x) \leq \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$
   Indication : on pourra utiliser le fait que $g_n'(x_n) = 0$.
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, soit $h(x) = xe^{-x}$. Calculer le maximum de h sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g_n(x)| \leq \frac{1}{ne}.$$
   (e) Étudier la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$? Justifiez votre réponse.