Partiel 15 Mars 2018

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Questions de cours.

1. Vrai ou faux, sans justification
   (a) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Si $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ alors l'intégrale de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
   (b) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Si l'intégrale de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
   (d) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition de convergence uniforme sur I.
   (b) Soit $x_0 \in I$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0 et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f. Que peut-on conclure sur la continuité de la fonction f en x_0 ? Justifiez votre réponse.
   (c) Donner la définition de convergence normale de la série $\sum f_n$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

1. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, montrer que l'intégrale I_n est convergente.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{1+t^n}\,dt.$$
   En déduire qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ telle que $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et déterminer l'expression de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
3. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on définit la fonction $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est définie par
$$g_n(t) = \frac{1 + t^{n-2}}{1 + t^n}.$$
   (a) Montrer que la suite $(g_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $\mathcal{I} = [0, 1]$ vers une fonction g à déterminer.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et pour tout $t \in \mathcal{I}$,
$$|g_n(t) - g(t)| \leq |t^{n-2} - t^n|.$$
   (c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in \mathcal{I}} |t^{n-2} - t^n|$ et en déduire que la suite $(g_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément sur $\mathcal{I}$.
4. Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 2. On pose $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente.
3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge-t-elle ? Justifiez votre réponse.